I Fonction trinôme du second degré

1. Rappels

Définition 1

Une fonction trinôme du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, et c des nombres réels et $a \neq 0$.

Sens de variation et courbe représentative

- La courbe représentative d'une fonction trinôme est une parabole.
- Son sommet S a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$

• Si a > 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$

• Si a < 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$

2. Forme canonique

Théorème 1

Pour tout trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), il existe deux nombres réels α et β tels que, pour tout x réel, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est la forme canonique.

Démonstration 1 :

En factorisant par "a" les deux premiers termes, puisque $a \neq 0$, on obtient $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c$.

Le terme $\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right)$ est le début du développement de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. En effet :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

On peut en déduire que $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$

Ainsi $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}\right] + c$

$= a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c$

$= a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ (en réduisant au même dénominateur).

Enfin au posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$, on obtient $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Exemple 1

- Déterminons la forme canonique de la fonction f définie sur P par $f(x)=-2x^2+12x-14$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2+12x-14 \\ &= -2\left(x^2-6x+7\right) \\ &= -2\left[(x-3)^2-9+7\right] \text{, puisque } x^2-6x=(x-3)^2-9 \\ &= -2\left[(x-3)^2-2\right] \text{ avec } \alpha=3 \text{ et } \beta=4 \end{aligned}$$

Remarque 1

- Le sommet de la parabole représentative d'une fonction trinôme a pour coordonnées (α ; β).
- Une fonction trinôme du second degré peut avoir plusieurs formes :
  - Forme développée : $f(x)=ax^2+bx+c$
  - Forme factorisée : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ (On reviendra cette forme dans le II)
  - Forme canonique : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

Il faut être capable de passer d'une forme à l'autre.

II Équation du second degré

Définition 2

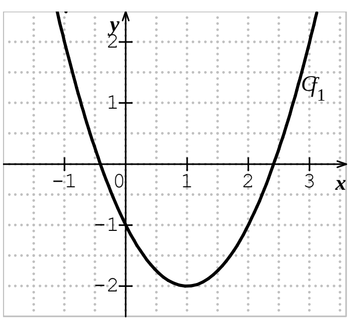
Résoudre une équation du type $ax^2+bx+c=0$ (a ≠ 0), c'est trouver s'il existe tous les nombres qui vérifient cette égalité. Un tel nombre est appelé <u>solution</u> de l'équation et <u>racine</u> du trinôme ax^2+bx+c.

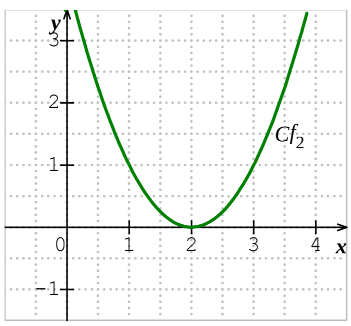
1. Approche graphique

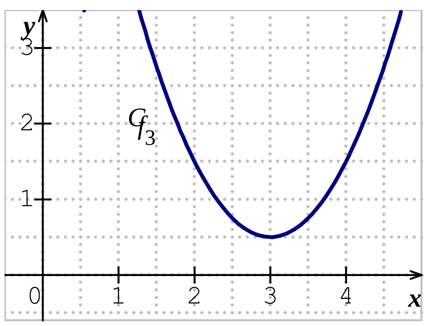
La représentation d'une fonction trinôme f permet de conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

Exemple 2

Considérons les trinômes f_1 , f_2 et f_3 dont leur représentation graphique est donnée ci-dessous :







Dans ces trois exemples, par lecture graphique, on peut conjecturer deux solutions pour f_1 , une solution pour f_2 et aucune solution pour f_3.

2. Approche algébrique : Résolution d'équation du second degré

Théorème 2

La résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (a ≠ 0), dépend du signe du nombre $\Delta=b^2-4ac$. Ce nombre est appelé discriminant du trinôme ax^2+bx+c.

1er Cas : Si $\Delta<0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution dans ℝ. (Voir terminale).

2ème Cas : Si $\Delta=0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution (double) $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

3ème Cas : alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet des solutions distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration 2 :

Reprenons l'expression de la forme canonique (démonstration 1) :

$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-b^2+4ac}{4a}$, posons $\Delta=b^2-4ac$.

En factorisant par a, on peut écrire : $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta<0$, alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif. Ainsi $f(x)$ est un produit de deux facteurs non nuls, donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.
- Si $\Delta=0$, alors $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Ainsi, puisque a ≠ 0, $f(x)=0$ équivaut à $x+\dfrac{b}{2a}=0$

  L'équation $f(x)=0$ a une seule solution et une seule $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta>0$, alors $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ et $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=a\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Ainsi, puisque a ≠ 0, $f(x)=0$ équivaut à $x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou $x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$.

L'équation $f(x)=0$ a deux solutions $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple 3

- Pour résoudre l'équation $2x^2-x+1=0$, on calcule le discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times2\times1=-7$.

  Donc l'équation $2x^2-x+1=0$ n'a pas de solution dans ℝ.
- Pour résoudre l'équation $x^2-6x+9=0$, on calcule le discriminant $\Delta=(-6)^2-4\times1\times9=0$

  Donc l'équation $x^2-6x+9=0$ a une seule solution $x=\dfrac{-(-6)}{2\times1}=3$.
- Pour résoudre l'équation $-2x^2+x+6=0$, on calcule le discriminant $\Delta=1^2-4\times(-2)\times6=49$

  Donc l'équation $-2x^2+x+6=0$ a deux solutions réelles distinctes

  $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{49}}{2\times(-2)}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{49}}{2\times(-2)}=2$

Remarque 2

La démonstration 2 nous permet d'avoir une forme factoriser de $f(x)$ lorsque $\Delta \geq 0$

- Si $\Delta = 0$ $f(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta > 0$ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

III Signe d'un trinôme

Théorème 3

Le signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ (a ≠ 0), dépend du signe du discriminant Δ.

Si $\Delta < 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta > 0$
$f(x)$ est du signe de a	$f(x)$ est du signe de a (et nul pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$)	$f(x)$ est du signe de a sauf lorsque x est entre les racines x_1 et x_2, dans ce cas $f(x)$ et a sont de signes contraires

Ainsi, suivant le signe de Δ on peut établir un tableau de signe d'un trinôme :

- Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

- Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a	

Application à la résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du second degré, on détermine le signe du trinôme associé

- Résolution de l'inéquation $-2x^2 + x + 6 \geq 0$

  Le calcul du discriminant donne $\Delta = 49$. Le trinôme a deux racines, $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$

  Le coefficient a est négatif. Le trinôme est donc positif (signe contraire de a) entre les racines

x	$-\infty$		$-3/2$		2		$+\infty$
$-2x^2 + x + 6$		-	0	+	0	-	

Donc l'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};2\right]$.