I Nombre dérivé et tangente

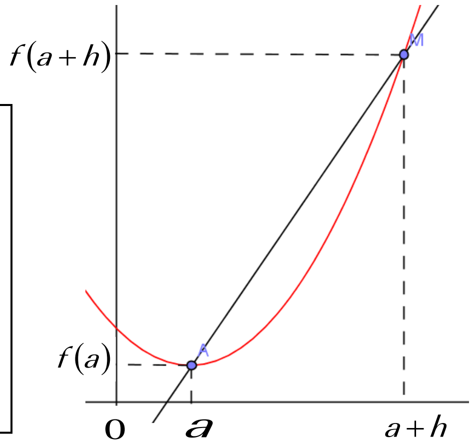
1. Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. On considère un point A de C_f d'abscisse a.

Soit h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I et M le point de C_f d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ce rapport est appelé taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.



Définition 1
Lorsque le taux d'accroissement tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, on dit que f est <u>dérivable</u> en a. Ce nombre est appelé <u>nombre dérivé</u> de f en a. Il est noté $f'(a)$.

On écrite alors : $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

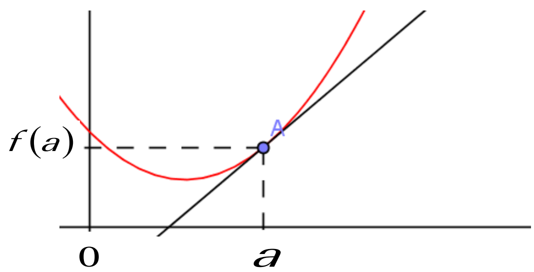
Exemple 1 Soit la fonction f telle que $f(x)=x^2$. On cherche si f est dérivable en 1

- On calcule $f(1+h)=(1+h)^2 = 1+2h+h^2$ et $f(1)=1$
- Le taux d'accroissement est $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$
- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2+0=2$
- f est donc dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est 2 et donc $f'(1)=2$

2. Tangente à une courbe

Le fait que le nombre h tende vers 0 se traduit graphiquement par le fait que M se rapproche du point A.
Quand M se rapproche de A sur C_f, le coefficient directeur de la droite (AM) tend vers une limite, et cette limite est égale à $f'(a)$

Définition 2
Si f est dérivable en a, on appelle <u>tangente</u> au point A à la courbe C_f la droite qui passe par A et de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$



- **Equation de la tangente à une courbe en un point**
  Une équation de cette tangente peut s'écrire $y=f'(a)x+p$,où p est l'ordonnée à l'origine de la droite (AM).

- **Exemple 2**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x$

On cherche à déterminer l'équation de la tangente T au point A d'abscisse 1, à la courbe C_f, représentative de f.

- On détermine le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 :
  $f(1)=-3$; $f(1+h)=(1+h)^2-4(1+h)=1+2h+h^2-4-4h=h^2-2h-3$
  D'où $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h^2-2h-3-(-3)}{h}=\dfrac{h^2-2h}{h}=h-2$
  Lorsque h tend vers 0 , $h-2$ tend vers − 2. Ainsi $f'(1)=-2$
  Le coefficient directeur de la tangente au point A est alors − 2 ;
- On écrit l'équation de la tangente :
  Son équation est de la forme $y=f'(a)x+p$, soit $y=-2x+p$
- On détermine l'ordonnée à l'origine :
  A(1 ; - 3) appartient à la tangent, donc ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente, donc $-3=-2\times1+p$, d'où $p=-1$
- On conclut : une équation de la tangente T est donc $y=-2x-1$

II Fonctions dérivées

1. Fonction dérivée

Définition 3

Soit f une fonction définie sur intervalle I.

On dit que f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout nombre a de I.

Alors la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée *la fonction dérivée* de f. On la note f'.

2. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	f	Dérivable sur	f'
constante	$f(x)=k$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
linéaire	$f(x)=mx$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$
affine	$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$
carré	$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
cube	$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
puissance	$f(x)=x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
inverse	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
racine carrée	$f(x)=\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

III Dérivées et opérations

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Propriété 1

La somme $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$

Démonstration 1

Pour tous nombres réels a et $a+h$ de I avec $h \neq 0$,

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

On reconnaît la somme des taux d'accroissement de u et de v. Les fonctions u et v sont dérivables, donc les limites de leurs taux d'accroissement, quand h tend vers 0, sont $u'(a)$ et $v'(a)$.

La limite du taux d'accroissement de $u+v$ entre a et $a+h$ est donc $u'(a)+v'(a)$ lorsque h tend vers o.

Propriété 2

Le produit uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$

Démonstration 2

Pour tous nombres réels a et $a+h$ de I avec $h \neq 0$,

$$\frac{uv(a+h)-uv(a)}{h}=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a)$$

Lorsque h tend vers 0, $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$, $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $v'(a)$ et on admet que $v(a+h)$ tend vers $v(a)$.

Alors, le taux d'accroissement de uv entre a et $a+h$ est donc $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ lorsque h tend vers o.

Propriété 3

Le produit ku est dérivable sur I et $(ku)'=ku'$

Propriété 4

Le carré $(u^2)'$ de u est dérivable sur I et $(u^2)'=2uu'$

Propriété 5

L'inverse de v, avec $v(x) \neq 0$ sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$

Propriété 6

Le quotient $\frac{u}{v}$, avec $v(x) \neq 0$ sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$