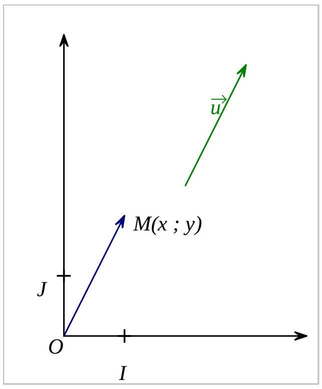
I Coordonnées d'un vecteur

Soit (0, I, J) un repère du plan :

Définition 1

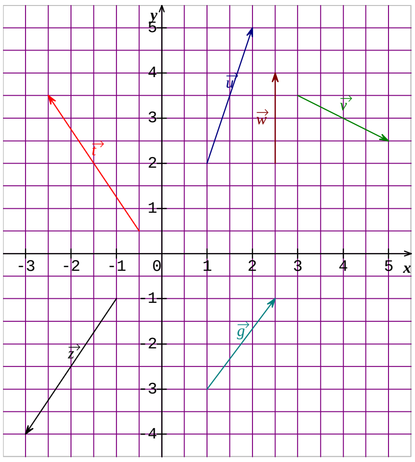
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$
sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Si M(x ; y) on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple 1

Dans le repère (O, I, J), lire les coordonnées des vecteurs suivants



- $\vec{u}\,(1 ; 3)$
- $\vec{v}\,(2 ; 1)$
- $\vec{w}\,(0 ; 2)$
- $\vec{t}\,(-2 ; 3)$
- $\vec{z}\,(-2 ; -3)$
- $\vec{g}\,(1,5 ; 2)$

Propriété 1

Dans un repère, si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

*Extrémité **moins** origine*

Exemple 2

Soit A(1 ; 3) et B(2 ; 5). Calculer les coordonnées $\overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-3 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Propriété 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

$\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Exemple 3

Dans le repère (O, I, J), on donne les points A(-2 ; 3), B(-3 ; -1) et C(0 ; -2).

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

- ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-(-2) \\ -1-(3) \end{pmatrix}$, soit encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 0-x_D \\ -2-y_D \end{pmatrix}$
- Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0-x_D = -1 \\ -2-y_D = -4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 2 \end{cases}$ donc D(1 ; 2)

II Somme de deux vecteurs

Propriété 3

Le plan est muni d'un repère (O, I, J)

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

La somme deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées (x + x' ; y + y')

Dons si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

Exemple 4

Soient $\vec{u}$(2 ; -5) et $\vec{v}$(4 ; 7) deux vecteurs.

- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 2+4 \\ -5+7 \end{pmatrix}$, soit $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Remarque

L'opposé du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le vecteur $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O}$

III Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition 2

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan muni du repère (O, I, J) et k un nombre réel.

<u>Le produit</u> du vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur $k\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. Soit $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple 5

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du point C défini par $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

- On remplace l'égalité vectorielle par les égalités des coordonnées
  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\overrightarrow{AC}} = x_{3\overrightarrow{AB}} \\ y_{\overrightarrow{AC}} = y_{3\overrightarrow{AB}} \end{cases}$
- Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$
  $\overrightarrow{AC}$ (x_C-1 ; y_C-2)
- De même calculons les coordonnées de $3\overrightarrow{AB}$
  $3\overrightarrow{AB}$ (3x1 ; 3x2) soit $3\overrightarrow{AB}$ (3 ; 6)
- D'où $\begin{cases} x_C - 1 = 3 \\ y_C - 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 8 \end{cases}$ donc C(4 ; 8)

IV Colinéarité de deux vecteurs

Définition 3
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Propriété 4
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si :

✓ $\vec{v} = k\vec{u}$ (leurs coordonnées sont proportionnelles)

ou

✓ xy' – x'y = 0

Exemple 6

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = 3\vec{u}$

Exemple 7

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ du plan.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car 3x8 – (- 4)x(- 6) = 24 – 24 = 0
- Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont colinéaires car (- 6)x(1) – 8x1 = - 6 – 8 = - 14 ≠ 0