Exercice 1 *(3 points)*

Rappel : si $\sqrt{a} = b$ équivaut à $b \geq 0$ et $a = b^2$

En se base sur ce qui précède, on peut écrire :

(I) $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$ et

(II) $15 - x = (x-3)^2 \iff x^2 - 5x - 6 = 0$ (en développant)

$\Delta = 49 > 0$ *Donc* $x_1 = -1$ *et* $x_2 = 6$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{6\}$

Exercice 2 *(4 points)*

1. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ et $5^2 = 25$. Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, un triangle de côté 3 ; 4 et 5 cm est rectangle.

2. Soit x le plus petit des trois entiers. Alors les trois côtés mesurent : x, $x+1$ et $x+2$ cm.
Le triangle est rectangle si et seulement si :

$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$ (En développant et en réduisant).

$\Delta = 16 > 0$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

Or on cherche une mesure positive donc seule $x = 3$ convient. Il n'y a pas d'autres solutions.

Exercice 3 *(7 points)*

1. Le vecteur directeur de la droite (BC) est $\overrightarrow{BC}(-2-4; -1-5)$; $\overrightarrow{BC}(-6; -6)$

L'équation de la droite (BC) s'écrit $-6x + 6y + c = 0$. Comme le point B appartient à droite (BC), donc ses coordonnées vérifient l'équation (BC), d'où $-6 \times 4 + 6 \times 5 + c = 0 \iff c = -6$

Ainsi une équation de la droite (BC) est $-6x + 6y - 6 = 0$.

2. Le vecteur directeur de la droite (AC) est $\overrightarrow{AC}(-2-6; -1+1)$; $\overrightarrow{AC}(-8; 0)$

L'équation de la droite (AC) s'écrit $8y + c = 0$. Comme le point A appartient à droite (AC), donc ses coordonnées vérifient l'équation (AC), d'où $8 \times (-1) + c = 0 \iff c = 8$

Ainsi une équation de la droite (AC) est $8y + 8 = 0$.

3. M appartient à droite (BC), donc ses coordonnées vérifient l'équation (BC), d'où

$-6 \times (-5) - 6y - 6 = 0 \iff y = -4$

Soit $M(-5; -4)$.

N est le milieu de [AB] d'où $N\left(\frac{6+4}{2}; \frac{-1+5}{2}\right)$, soit $N(5; 2)$

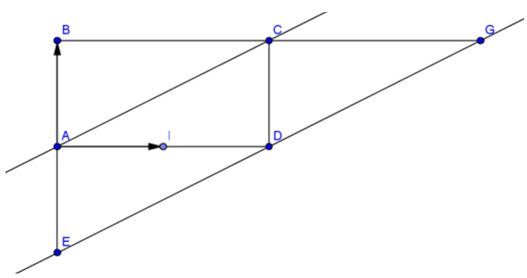
$K(0; y)$ appartient à droite (BC), donc ses coordonnées vérifient l'équation (BC), d'où $8y + 8 = 0 \iff y = -1$

Soit $K(0; -1)$.

4. $\overrightarrow{MN}(5+5; 2+4)$, soit $\overrightarrow{MN}(10; 6)$. $\overrightarrow{MK}(0+5; -1+4)$, soit $\overrightarrow{MK}(5; 3)$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MK}$, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont donc colinéaires. On en déduit alors que les points M, N et K sont alignés.

Exercice 4 *(6 points)*



$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 2AB$

1. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right)$ on a : A(0 ; 0) , B(0 ; 1) , C(2 ; 1) et D(2 ; 0)

2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right)$ on a E(0 ; -1) et G(4 ; 1).

3. Les points E, D et G sont alignés si et seulement si

les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{ED}(2-0;0+1)$, soit $\overrightarrow{ED}(2;\ 1)$ et $\overrightarrow{EG}(4-0;1+1)$, soit $\overrightarrow{EG}(4;\ 2)$.

$2\times2-1\times4=4-4=0$, les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont donc colinéaires et les points E, D et G sont alignés.

4. Les droites (AC) et (EG) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AC}(2-0;1-0)$, soit $\overrightarrow{AC}(2;\ 1)$ et $\overrightarrow{EG}(4;\ 2)$.

$2\times2-1\times4=4-4=0$ les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont donc colinéaires et les droites (AC) et (EG) sont parallèles

5. $\overrightarrow{EG}(4;\ 2)$ est un vecteur directeur de la droite (EG) , donc (EG) a une équation de la forme $2x-4y+c=0$.

Le point E appartient à la droite (EG) , donc les coordonnées de E vérifient l'équation de (EG) :
$2\times0-4\times(-1)+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad c=-4$
(EG) a donc pour équation cartésienne $2x-4y-4=0$

Pour passer l'équation cartésienne à l'équation réduite, on exprime y en fonction de x. D'où $y=\frac{1}{2}x-1$

6. La droite d parallèle à la droite (EG) si et seulement si $2\times(-2)-4\times m=-4-4m=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Ainsi pour $m=-1$, la droite d d'équation $-x+2y+2=0$ est parallèle à la droite (EG).

Bonus *(3 points)*
Pour montrer que les droites des (d) et (d') sont sécantes, on montre que leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires :

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et un vecteur directeur de la droite (d') est $\vec{v}(-1;2)$

$1\times2-\frac{1}{2}\times(-1)=\frac{5}{2}\neq0$ Donc les droites des (d) et (d') sont sécantes.

On cherche les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d') en résolvant le système d'équation à deux inconnues :

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-2 \\ 2x+y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-2 \\ 2x+\frac{1}{2}x-2-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-2 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Les droites (d) et (d') sont sécantes au point A(4 ; 0).
On cherche un point B appartenant à la droite (d) et un point C appartenant à la droite (d') :
Pour $x=0$, on a $y=\frac{1}{2}\times0-2=-2$. Soit B(0 ; -2)
Pour $x=0$, on a $2\times0+y-8=0 \Leftrightarrow y=8$. Soit C(0 ; 8)
On calcule les longueurs du triangle ABC :
$AB=\sqrt{(0-4)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{20}$; $AC=\sqrt{(0-4)^2+(8-0)^2}=\sqrt{80}$; $CB=\sqrt{(0-0)^2+(-2-8)^2}=\sqrt{100}$
$AB^2+AC^2=20+80=100$, or $CB^2=100$. Donc $AB^2+AC^2=BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est bien rectangle en A. Donc les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.