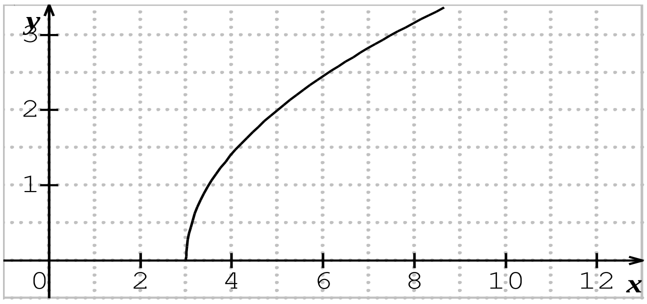
Sujet A

Exercice 1 *(5points)*

1. La fonction f admet une expression sous la racine, donc f est définie si $2x-6 \geq 0$. Ce qui donne $x \geq 3$. L'ensemble de définition est [3 ; +∞[.

2. La fonction f est de la forme $f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=2x-6$. La fonction u est affine, elle est strictement croissante car le coefficient a vaut 2 et est positif. Les fonctions $\sqrt{u}$ et u varient dans le même sens. Donc la fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle [3 ; +∞[.

3.



Exercice 2 *(6 points)*

1. $f(x)$ admet un dénominateur. Il faut chercher et exclure les réels qui annulent ce dénominateur.

$f(x)$ existe si, et seulement si, $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

La valeur interdite est – 2, donc l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}-\{-2\}$

2. $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}$, on réduit au même dénominateur :

$f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{ax+2a+b}{x+2}$, or $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

Par identification $\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=-1 \Leftrightarrow b=-5 \end{cases}$ Ainsi $f(x)=2-\dfrac{5}{x+2}$

3. Posons $u(x)=x+2$. La fonction u est une fonction affine, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient vaut 1 et est positif. Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens de variations contraires, donc $\dfrac{1}{x+2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}-\{-2\}$. Si $\lambda < 0$, les fonctions v et λv ont des sens de variations contraires donc $-\dfrac{5}{x+2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}-\{-2\}$. Les fonctions w et w + k ont le même sens de variation donc $2-\dfrac{5}{x+2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Exercice 3 *(9 points)*

1. $\frac{1}{u}$ est définie $\mathbb{R}-\{-1;3\}$.

$u(x)=x^2-2x-3$, u est trinôme de type ax^2+bx+c, avec a = 1, b = -2 et c = - 3

De plus $u(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$. Donc *u* est strictement décroissante sur]-∞ ; 1] et strictement croissante sur [1 ; +∞[.

Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variations contraires, donc $\frac{1}{u}$ est strictement croissante sur]-∞ ; 1[et décroissante sur]1 ; +∞[.

2. $\sqrt{u}$ est définie sur sur]-∞ ; -1]U[3 ; +∞[.

$\sqrt{u}$ et u varient dans le même sens. Donc $\sqrt{u}$ est strictement décroissante sur]-∞ ; -1] et strictement croissante sur [3 ; +∞[.

3. $f(x)=|u(x)|$.

a. $u(x)=x^2-2x-3$ admet deux racines – 1 et 3, d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f(x)=|u(x)|=\begin{cases} u(x) & si \in]-\infty\,;-1]\cup[3;+\infty[\\ -u(x) & si \in [-1;3] \end{cases}$$

b. D'après ce qui précède et en tenant compte des variations de u, on peut écrire :

- Si $x \leq -1$, alors $f(x)=u(x)$ et la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-∞ ; -1]
- Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $f(x)=-u(x)$ et la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [–1 ; 1]
- Si $1 \leq x \leq 3$, alors $f(x)=-u(x)$ et la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; 3]
- Si $x \geq 3$, alors $f(x)=u(x)$ et la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [3 ; +∞[

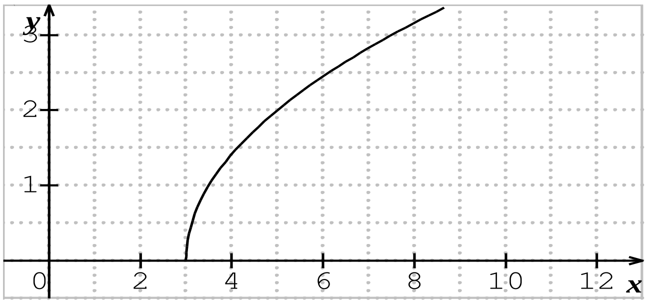
Sujet B

Exercice 1 *(5points)*

1. La fonction f admet une expression sous la racine, donc f est définie si $3x-9\geq 0$. Ce qui donne $x \geq 3$.
L'ensemble de définition est [3 ; +∞[.

2. La fonction f est de la forme $f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=3x-9$. La fonction u est affine, elle est strictement croissante car le coefficient a vaut 3 et est positif. Les fonctions $\sqrt{u}$ et u varient dans le même sens. Donc la fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle [3 ; +∞[.

3.



Exercice 2 *(6 points)*

1. $f(x)$ admet un dénominateur. Il faut chercher et exclure les réels qui annulent ce dénominateur.

$f(x)$ existe si, et seulement si, $x+3\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -3$

La valeur interdite est – 3, donc l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}-\{-3\}$

2. $f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}$, on réduit au même dénominateur :

$f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}=\dfrac{ax+3a+b}{x+3}$, or $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

Par identification $\begin{cases} a=2 \\ 3a+b=-1 \Leftrightarrow b=-7 \end{cases}$ Ainsi $f(x)=2-\dfrac{7}{x+3}$

3. Posons $u(x)=x+3$. La fonction u est une fonction affine, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient vaut 1 et est positif. Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens de variations contraires, donc $\dfrac{1}{x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}-\{-3\}$. Si $\lambda < 0$, les fonctions v et λv ont des sens de variations contraires donc $-\dfrac{7}{x+3}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}-\{-3\}$. Les fonctions w et w + k ont le même sens de variation donc $2-\dfrac{7}{x+3}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}-\{-3\}$.

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}-\{-3\}$.

Exercice 3 *(9 points)*

1. $\frac{1}{u}$ est définie $\mathbb{R}-\{-1;3\}$.

$u(x)=x^2-2x-3$, u est trinôme de type ax^2+bx+c, avec a = 1, b = -2 et c = - 3

De plus $u(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$. Donc u est strictement décroissante sur]-∞ ; 1] et strictement croissante sur [1 ; +∞[.

Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variations contraires, donc $\frac{1}{u}$ est strictement croissante sur]-∞ ; 1[et strictement decroissante sur]1 ; +∞[.

2. $\sqrt{u}$ est définie sur sur]-∞ ; -1]U[3 ; +∞[.

$\sqrt{u}$ et u varient dans le même sens. Donc $\sqrt{u}$ est strictement décroissante sur]-∞ ; -1] et strictement croissante sur [3 ; +∞[.

3. $f(x)=|u(x)|$.

a. $u(x)=x^2-2x-3$ admet deux racines – 1 et 3, d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f(x)=|u(x)|=\begin{cases} u(x) & si \in]-\infty\,;-1]\cup[3;+\infty[\\ -u(x) & si \in [-1;3] \end{cases}$$

b. D'après ce qui précède et en tenant compte des variations de u, on peut écrire :

- Si $x\leq -1$, alors $f(x)=u(x)$ et la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-∞ ; -1]
- Si – 1 ≤ x ≤ 1, alors $f(x)=-u(x)$ et la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [–1 ; 1]
- Si 1 ≤ x ≤ 3, alors $f(x)=-u(x)$ et la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; 3]
- Si $x\geq 3$, alors $f(x)=u(x)$ et la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [3 ; +∞[