Exercice 1

1. $f'(x)=3\times 5x^4=15x^4$

2. $f'(x)=-2x+2$

3. $f'(x)=-12x-7$

4. $f'(x)=-3x^2-10x+\dfrac{1}{2}$

5. $f'(x)=\dfrac{5x^4}{5}-\dfrac{4x^3}{4}-\dfrac{2\times 5x}{4}=x^4-x^3-\dfrac{5}{2}x$

6. $f(x)=-(2x-3)\sqrt{x}$

f est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=2x-3$ et $v(x)=\sqrt{x}$

$u'(x)=2$ $\quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=-[u(x)\times v(x)]'=-[u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)]=-\left(2\times\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(2x-3)\right)=-\left(\frac{2x+2x-3}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{4x-3}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 2

1. f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x^2-1$ et $v(x)=x^2+1$

$u'(x)=2x$ $\quad v'(x)=2x$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

2. f définie sur $]2\,;+\infty[$ $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$

f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x)=2x-4$ et $v'(x)=2$

$$f'(x)=\frac{-v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{-2}{(2x-4)^2}$$

3. f définie sur $]-\infty\,;-1[$ $f(x)=\dfrac{3-4x}{x+1}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=3-4x$ et $v(x)=x+1$

$u'(x)=-4$ $\quad v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}=\frac{-4(x+1)-1(3-4x)}{(x+1)^2}=\frac{-4x-4-3+4x}{(x+1)^2}=\frac{-7}{(x+1)^2}$$

Exercice 3

1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x-1$ et $v(x)=x+1$

$u'(x)=1$ $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

2. $f(x)=\dfrac{-2x+3}{2x-5}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=-2x+3$ et $v(x)=2x-5$

$u'(x)=-2$ $v'(x)=2$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}=\frac{-2(2x-5)-2(-2x+3)}{(2x-5)^2}=\frac{-4x+10+4x-6}{(2x-5)^2}=\frac{4}{(2x-5)^2}$$

3. $f(x)=\dfrac{4x+1}{3-x}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=4x+1$ et $v(x)=3-x$

$u'(x)=4$ $v'(x)=-1$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}=\frac{4(3-x)-(-1)(4x+1)}{(3-x)^2}=\frac{12-4x+4x+1}{(3-x)^2}=\frac{13}{(3-x)^2}$$

Exercice 4

1. La courbe $\mathcal{C}$ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses si leur coefficient directeur est nul.

- On calcule la fonction dérivée : $f'(x)=3x^2+4x+3$
- On cherche les abscisses pour lesquels $f'(x)=0$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2+4x+3=0$, $\Delta=4^2-4\times3\times3=16-36=-20$,

$\Delta<0$, l'équation n'admet pas de solutions :

Donc la courbe $\mathcal{C}$ n'admet pas de tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $y=3x-5$ si leur coefficient directeur est égal à 3.

- On cherche les abscisses pour lesquels $f'(x)=3$

$f'(x)=3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2+4x+3=3$, $x(3x+4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$ ou $x=-\dfrac{4}{3}$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y=3x-5$, aux points d'abscisses $x=0$ et $x=-\dfrac{4}{3}$